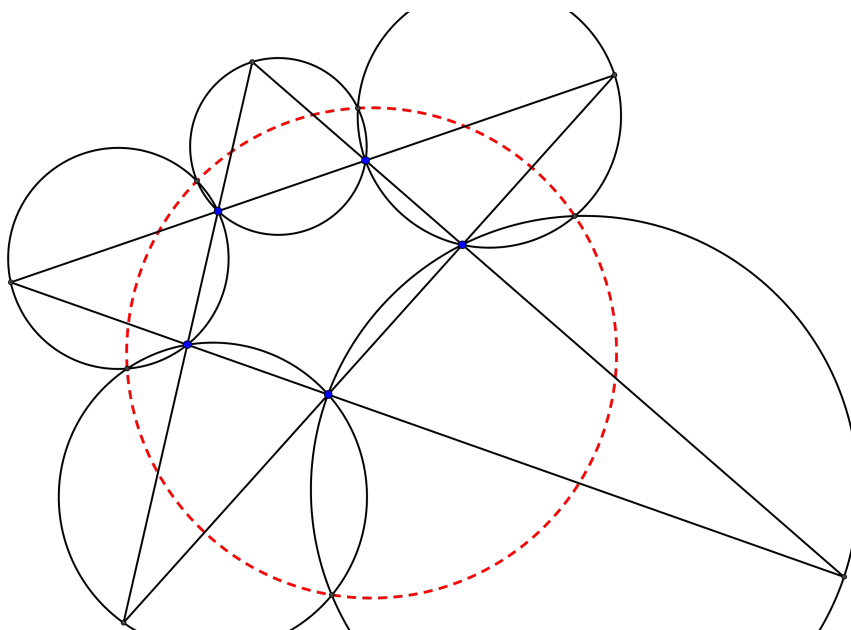


В этом листке два раздела. В каждом разделе три задачи. Сдача любых двух задач из раздела освобождает от сдачи соответствующего листка.

Инверсия

1. Гексаэдром называют многогранник с шестью четырёхугольными гранями, сходящимися по три в каждой вершине (таков, например, куб). Докажите, что, если семь вершин гексаэдра лежат на сфере, то и восьмая — тоже.

2. Дана пятиконечная звезда, как на рисунке. Вокруг её «лучей» описаны окружности. Соседние окружности пересекаются в вершине звезды и ещё в одной точке. Докажите, что эти пять новых точек лежат на одной окружности.



Проективные преобразования

1. Дана окружность и точка на ней. Одной линейкой проведите через эту точку касательную к окружности.

2. На проективной плоскости дан пятиугольник $ABCDE$. Точка A_1 — пересечение прямых BD и CE , точка B_1 — пересечение прямых CE и AD . Аналогично строятся точки C_1 , D_1 и E_1 . Докажите, что существует проективное преобразование, переводящее исходный пятиугольник в пятиугольник $A_1B_1C_1D_1E_1$.