

2. Числа Бернулли и суммы по целым точкам

▷ *Рядом Тодда* называется формальный степенной ряд

$$\text{td}(x) := \frac{x}{e^x - 1} = B_0 + B_1x + B_2\frac{x^2}{2} + B_3\frac{x^3}{3!} + \dots;$$

коэффициенты B_n называются *числами Бернулли*.

Задача 1. Запишите рекурренту на числа Бернулли, кодируемую условной записью « $(B + 1)^{n+1} = B^{n+1}$ » и докажите ее.

УКАЗАНИЕ. $\frac{x}{e^x - 1} \cdot (e^x - 1) = x$.

Задача 2. Найдите B_4 и B_6 . Запишите получающуюся формулу для суммы 7-х степеней последовательных натуральных чисел.

Задача 3. Пусть f — многочлен, F — его *первообразная* (такой многочлен, что $F' = f$). Тогда $f(x) + \dots + f(x + n - 1) = \text{td}\left(\frac{d}{dx}\right)(F(x + n) - F(x))$.

Задача 4. Чему равна производная многочлена $S_k(x)$?

Задача 5*. Выразите коэффициенты ряда а) $\text{ctg } x$; б) $\text{tg } x$ через числа Бернулли.

УКАЗАНИЕ. $\text{tg}(x) = \text{ctg}(x) - 2 \text{ctg}(2x)$.

Задача 6*. Знаки (ненулевых) чисел Бернулли чередуются.

УКАЗАНИЕ. Воспользуйтесь предыдущей задачей.