

## Неравенства-3

1. Докажите, что при  $a, b, c > 0$  :  $ab + bc + ca \geq a\sqrt{bc} + b\sqrt{ca} + c\sqrt{ab}$ .
2. Докажите, что многочлен  $x^{12} - x^9 + x^4 - x + 1$  при всех значениях  $x$  положителен.
3. Докажите неравенство  $(a - b)^2 \geq (a - c)(c - b)$ .
4. Докажите, что при любом  $x$  выполняется неравенство  $x(x + 1)(x + 2)(x + 3) \geq -1$ .
5. Докажите, что при  $x, y \geq 0$  :  $(\sqrt{x} + \sqrt{y})^8 \geq 64xy(x + y)^2$
6. Докажите, что если  $x + y + z \geq xyz$ , то  $x^2 + y^2 + z^2 \geq xyz$ .
7. Положительные числа  $a, b, c$  таковы, что  $abc = 1$ . Докажите неравенство

$$\frac{1}{1 + a + b} + \frac{1}{1 + b + c} + \frac{1}{1 + c + a} \leq 1.$$

(Московская математическая олимпиада, 1997 год, 11 класс)