Неравенства 1

1. a) Сравнив дроби $\frac{111110}{111111}, \frac{222221}{222223}, \frac{333331}{333334}$, расположите их в порядке возрастания.
b) Сравните числа $(\sqrt{23}-\sqrt{11})$ и $(\sqrt{22}-\sqrt{10})$.

2. Докажите неравенство для любых a, b, c, d.
a) $a^4 - 4a^3b + 8a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4 \geq 0$
b) $(a^2-b^2)(c^2-d^2) \leq (ac-bd)^2$

3. Докажите неравенство и найдите, когда принимается равенство.
$(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$, где $a, b, c > 0$

4. Числа x, y, z и t таковы, что $x > y^3, y > z^3, z > t^3, t > x^3$. Докажите, что $xyzt > 0$.

5. Докажите неравенство при $a, b > 0$ и $a + b = 1$.

$$(a+\frac{1}{a})^2 + (b+\frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$$

6. Положительные числа a, b, c удовлетворяют соотношению $ab + bc + ac = 1$
Докажите, что

$$\sqrt{a+\frac{1}{a}} + \sqrt{b+\frac{1}{b}} + \sqrt{c+\frac{1}{c}} \geq 2(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}).$$

(Региональный этап Всероссийской олимпиады по математике 2014-2015, 11 класс)

7. Положительные числа x, y, z удовлетворяют условию $xyz \geq xy + yz + zx$.
Докажите неравенство

$$\sqrt{xyz} \geq \sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z}.$$

(Региональный этап Всероссийской олимпиады по математике 2015-2016, 11 класс)